

## Vývoj aplikace v MATLABu pro řešení úloh analytické geometrie ve 2D a 3D

Development of the MATLAB application  
for solving problems of the analytic  
geometry in 2D and 3D

## Zadání bakalářské práce

Student: **Alena Vašatová**

Studijní program: **B2647 Informační a komunikační technologie**

Studijní obor: **1103R031 Výpočetní matematika**

Téma: **Vývoj aplikace v MATLABu pro řešení úloh analytické geometrie ve 2D a 3D**  
**Development of the MATLAB application for solving problems of the analytic geometry in 2D and 3D**

Zásady pro vypracování:

Hlavní náplní práce je vytvořit v MATLABu aplikaci s grafickým uživatelským rozhraním pro řešení úloh analytické geometrie. V tomto rozhraní si bude moci uživatel definovat dva objekty (bod, přímka, rovina, kvadratická plocha) a řešit vybrané metrické úlohy jako je vzdálenost, odchylka, obsahy a objemy.

Nastudování problematiky.  
Implementace v MATLABu.

Seznam doporučené odborné literatury:

Podle pokynů vedoucího diplomové práce

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **doc. Ing. Tomáš Kozubek, Ph.D.**

Datum zadání: 30.11.2008

Datum odevzdání: 07.05.2009



*Zdeněk Dostál*

prof. RNDr. Zdeněk Dostál, DSc.  
vedoucí katedry

*Ivo Vondrák*

prof. Ing. Ivo Vondrák, CSc.  
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně. Uvedla jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpala.

V Ostravě 7. května 2009

.....

Ráda bych na tomto místě poděkovala všem, kteří mi pomohli s touto prací, především pak svému vedoucímu za jeho vedení při tvorbě práce, trpělivost a čas při konzultacích. Také bych ráda poděkovala těm, kteří mi pomáhali a podporovali mě během mých studií.

## Abstrakt

Hlavní náplní práce je vytvořit v MATLABu aplikaci s grafickým uživatelským rozhraním pro řešení úloh analytické geometrie. V tomto rozhraní si bude moci uživatel vybrat ze tří úloh. V první úloze uživatel definuje dva objekty (bod, přímka, ve 3D i rovina a kvadratická plocha) a řeší jejich vzájemnou polohu, průnik a případné metrické úlohy jako je vzdálenost a odchylka. Druhá úloha se zabývá výpočtem obsahu rovnoběžníku ve 2D a 3D a objemu rovnoběžnostěnu ve 3D, obé tvořené uživatelem definovanými vektory. Poslední úloha, která slouží k ukázce praktického využití analytické geometrie, hledá tzv. „kontaktní páry“ mezi dvěma objekty (Master vůči Slavu) tvořenými sítí uzlů a uloženými ve fem struktuře.

**Klíčová slova:** MATLAB, analytická geometrie, vzájemná poloha, obsah, objem, kontaktní úloha

## Abstract

The goal of the thesis is to develop the application in MATLAB with graphical user interface for solving analytic geometry problems. User can choose from three tasks in the interface. In first part, user defines two objects (point, line, in 3D also plane and quadratic surface) and solves their relative position, intersection and eventually metrical problems as distance and deviation. The second part is concerned with computing volume of parallelogram in 2D and 3D and volume of parallelepiped in 3D, both formed by user defined vectors. Final part, which is intended for practical usage of analytic geometry, enables to search for so-called "contact pairs" between two objects (Master against Slave) created by fem meshes and stored in fem structure.

**Keywords:** MATLAB, analytic geometry, mutual position, volume, contact problem

## Seznam použitých symbolů, zkratk a značení

$A$	– body značíme velkými písmeny
$\mathbf{v}$	– vektory značíme malými tučnými písmeny
$p$	– přímky, roviny a kvadratické plochy značíme malými písmeny
$\overrightarrow{AC}$	– vektor tvořený body
$\mathbb{R}$	– množina reálných čísel
fem	– finite element method - metoda konečných prvků
$h$	– hodnost matice
$(\mathbf{n}, \mathbf{v}),$	– skalární součin vektorů
$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$	
$\mathbf{n} \times \mathbf{v}$	– vektorový součin dvou vektorů
$\ \mathbf{n}\ $	– norma vektoru
$ a $	– absolutní hodnota čísla

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Teoretický základ</b>	<b>5</b>
2.1	Eukleidovský prostor a uživatelem zadávané objekty . . . . .	5
2.2	Vzájemná poloha těles . . . . .	8
2.3	Metrické úlohy . . . . .	12
2.4	Výpočet obsahu a objemu . . . . .	16
2.5	Kontaktní úloha . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Implementace v MATLABu</b>	<b>20</b>
<b>4</b>	<b>Aplikace</b>	<b>22</b>
4.1	Vzájemná poloha těles . . . . .	22
4.2	Výpočet objemu a obsahu . . . . .	23
4.3	Hledání „kontaktních párů“ . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>30</b>
<b>6</b>	<b>Literatura</b>	<b>31</b>

## Seznam obrázků

1	Vzdálenost dvou bodů. . . . .	12
2	Vzdálenost bodu a přímky. . . . .	13
3	Vzdálenost bodu a roviny. . . . .	13
4	Vzdálenost dvou mimoběžných přímek. . . . .	14
5	Odchylka dvou různoběžných přímek. . . . .	15
6	Odchylka různoběžné přímky a roviny. . . . .	15
7	Odchylka dvou různoběžných rovin. . . . .	16
8	Obsah rovnoběžníku v $\mathcal{E}_2$ . . . . .	16
9	Objem rovnoběžnostěnu v $\mathcal{E}_3$ . . . . .	17
10	Dvě tělesa ve vzájemném kontaktu. . . . .	18
11	Úvodní okno aplikace. . . . .	22
12	Aplikace část první. . . . .	24
13	Aplikace část první - příklad použití. . . . .	25
14	Aplikace část druhá. . . . .	26
15	Aplikace část druhá - příklad použití. . . . .	27
16	Aplikace část třetí. . . . .	28
17	Aplikace část třetí - příklad použití. . . . .	29



## Seznam výpisů zdrojového kódu

1	Matlabovské funkce pracující s vektory. . . . .	20
2	Matlabovské funkce pro zobrazení výsledku. . . . .	20

# 1 Úvod

Geometrii je možno budovat dvěma metodami: syntetickou a analytickou. Při analytické metodě jsou nejdříve geometrické objekty charakterizovány číselnými údaji a na základě práce s těmito číselnými údaji jsou pak vyvozovány geometrické vlastnosti daných objektů. Ačkoliv první předzvěst analytické metody lze najít také již ve starověkém Řecku, všeobecně kladou historikové matematiky zrod vlastní analytické geometrie teprve do 17. století.

Tento zrod byl podmíněn dvěma důležitými aspekty: zavedením jednoduché matematické symboliky a rozvojem algebry. Zjednodušeně by se dalo říci, že analytická geometrie je aplikací algebry na geometrii. Tuto aplikaci provedl v 1. pol. 17. stol. René Descartes a položil tím základ k systematickému budování této disciplíny. Přičemž na počátku se úvahy analytické geometrie odehrávaly výhradně na půdě lineární algebry [2].

Hlavní náplní této práce je implementace aplikace s grafickým uživatelským rozhraním pro řešení úloh analytické geometrie. Hledání „kontaktních párů“ nám slouží jako příklad praktického využití těchto úloh.

V první kapitole shrneme teoretické znalosti potřebné k vývoji výsledné aplikace, jako jsou definice objektů analytické geometrie a kontaktní úlohy, které žádává uživatel do rozhraní aplikace, dále pak následuje výčet vzájemných poloh objektů analytické geometrie, postup jak je určíme a výpočet případných společných bodů. Také si řekneme, jak řešit metrické úlohy, jako jsou vzdálenost a odchylka, které se vzájemnými polohami souvisí. Vysvětlíme i výpočet obsahu a objemu. Na konci kapitoly definujeme kontaktní úlohu a rozebereme hledání „kontaktních párů“.

Druhá kapitola se zabývá ukázkou implementace aplikace a to v programovém prostředí a skriptovacím programovacím jazyku MATLAB (verze R2008b), který je určen pro symbolické a numerické výpočty, analýzu a vizualizaci dat, modelování a simulace dějů. Jako takový je tedy vhodný pro implementaci aplikace.

Před závěrem si krátce popíšeme vzniklou aplikaci, její uživatelské rozhraní a ukážeme si příklady jejího použití.

## 2 Teoretický základ

V této kapitole se budeme věnovat teoretickým znalostem potřebným k samotné implementaci aplikace. Nejprve popíšeme objekty, které bude moci uživatel zadat a s kterými budeme pracovat. Poté rozebereme, jak zjistíme vzájemné polohy těles a z nich vyplývající metrické úlohy, níže následují vztahy pro výpočet obsahů a objemů těles definovaných vektory. Tyto teoretické znalosti byly čerpány z [1, 3]. Nakonec ukážeme hledání „kontaktních párů“.

### 2.1 Eukleidovský prostor a uživatelem zadávané objekty

#### 2.1.1 Eukleidovský prostor

**Definice 2.1** *Necht' je dán vektorový prostor  $\mathcal{V}$  se skalárním součinem, množina bodů  $\mathcal{E}$  a zobrazení*

$$\mathcal{E} \times \mathcal{E} \ni (A, B) \mapsto \overrightarrow{AB} \in \mathcal{V}.$$

*Množina  $\mathcal{E}$  se nazývá eukleidovský bodový prostor se zaměřením  $\mathcal{V}$ , jestliže platí:*

1. *Ke každému  $A \in \mathcal{E}$  a  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  existuje jediný bod  $B \in \mathcal{E}$  tak, že*

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{v}.$$

2. *Pro libovolné body  $A, B, C \in \mathcal{E}$  platí*

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Dvojměrný prostor (2D) budeme značit  $\mathcal{E}_2$  a trojměrný prostor (3D) budeme značit  $\mathcal{E}_3$ .

#### 2.1.2 Bod

**Definice 2.2** *Bod je bezrozměrný základní geometrický útvar. Je určen souřadnicemi - uspořádanou dvojicí  $X = [x_1, x_2]$  v  $\mathcal{E}_2$ , resp. trojicí  $X = [x_1, x_2, x_3]$  v  $\mathcal{E}_3$ .*

#### 2.1.3 Vektor

**Definice 2.3** *Vektor je množina všech souhlasně orientovaných rovnoběžných úseček stejné délky, daných uspořádanou dvojicí  $\mathbf{u} = [u_1, u_2]$  v  $\mathcal{E}_2$ , resp. trojicí  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$  v  $\mathcal{E}_3$ .*

#### 2.1.4 Přímka

**Definice 2.4** *Necht'  $A \in \mathcal{E}_2$ , resp.  $\mathcal{E}_3$  je zadaný bod a  $\mathbf{u} \in \mathcal{E}_2$ , resp.  $\mathcal{E}_3$  zadaný nenulový vektor. Pak přímka  $p$  procházející bodem  $A$  se směrem  $\mathbf{u}$  je množina :*

$$p = \{A + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}.$$

Rozepíšeme-li si tento zápis po složkách, dostaneme pro body  $X = [X_1, X_2, X_3]$  přímky  $p$  procházející bodem  $A = [A_1, A_2, A_3]$  ve směru  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$  tzv. parametrické rovnice přímky  $\mathcal{E}_3$

$$\begin{aligned}X_1 &= A_1 + tu_1 \\X_2 &= A_2 + tu_2 \\X_3 &= A_3 + tu_3,\end{aligned}$$

kde  $t \in \mathbb{R}$  se nazývá parametr. Obdobně i v  $\mathcal{E}_2$ .

### 2.1.5 Rovina

**Definice 2.5** Necht'  $A \in \mathcal{E}_3$  je zadaný bod a  $\mathbf{n} \in \mathcal{E}_3$  je zadaný nenulový vektor. Pak rovina procházející bodem  $A$  s normálovým vektorem  $\mathbf{n}$  je množina

$$r = \left\{ X \in \mathcal{E}_3 : (\mathbf{n}, \overrightarrow{AX}) = 0 \right\}.$$

Rozepíšeme-li si tuto definici po složkách, dostaneme pro body  $X = [X_1, X_2, X_3]$  roviny  $r$  procházející bodem  $A = [A_1, A_2, A_3]$  s normálovým vektorem  $\mathbf{n} = [n_1, n_2, n_3]$  normálovou rovnici roviny

$$n_1(X_1 - A_1) + n_2(X_2 - A_2) + n_3(X_3 - A_3) = 0$$

nebo obecnou rovnici roviny

$$aX_1 + bX_2 + cX_3 + d = 0,$$

kde

$$a = n_1, b = n_2, c = n_3 \text{ a } d = -n_1A_1 - n_2A_2 - n_3A_3.$$

### 2.1.6 Kulová plocha

**Definice 2.6** Rovnice

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - p)^2 = r^2,$$

kde  $m, n, p, r \in \mathbb{R}$  a  $r > 0$ , je rovnicí kulové plochy se středem  $\mathcal{E}_3 \ni S = (m, n, p)$  a poloměrem  $r$ .

### 2.1.7 Elipsoid

**Definice 2.7** Rovnice

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} + \frac{(z-p)^2}{c^2} = 1,$$

kde  $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$  a  $a, b, c > 0$ , je rovnicí elipsoidu se středem  $\mathcal{E}_3 \ni S = (m, n, p)$  a parametry  $a, b, c$ .

**Poznámka 2.1** Jestliže je v rovnici elipsoidu  $a = b \neq c$ , resp.  $a = c \neq b$ ,  $b = c \neq a$  nazývá se plocha rotační elipsoid. Rotační elipsoid vznikne rotací elipsy kolem osy  $z$ , resp.  $x$ ,  $y$ . Jestliže  $a = b = c$  je elipsoid kulovou plochou.

### 2.1.8 Jednodílný hyperboloid

**Definice 2.8** *Rovnice*

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} - \frac{(z-p)^2}{c^2} = 1,$$

kde  $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$  a  $a, b, c > 0$ , je rovnicí jednodílného hyperboloidu se středem  $\mathcal{E}_3 \ni S=(m, n, p)$  a parametry  $a, b, c$ .

**Poznámka 2.2** Jestliže je v rovnici jednodílného hyperboloidu  $a = b$ , pak se nazývá rotační jednodílný hyperboloid s osou rotace  $z$ . Rotační jednodílný hyperboloid vznikne rotací hyperboly kolem osy  $z$ .

### 2.1.9 Dvojdílný hyperboloid

**Definice 2.9** *Rovnice*

$$-\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} + \frac{(z-p)^2}{c^2} = 1,$$

kde  $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$  a  $a, b, c > 0$ , je rovnicí dvojdílného hyperboloidu se středem  $\mathcal{E}_3 \ni S=(m, n, p)$  a parametry  $a, b, c$ .

**Poznámka 2.3** Jestliže je v rovnici dvojdílného hyperboloidu  $b = c$ , pak se nazývá rotační dvojdílný hyperboloid vzniklý rotací hyperboly kolem osy  $x$ .

### 2.1.10 Eliptický paraboloid

**Definice 2.10** *Rovnice*

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 2(z-p),$$

kde  $a, b, m, n, p \in \mathbb{R}$  a  $a, b > 0$ , je rovnicí eliptického paraboloidu se středem  $\mathcal{E}_3 \ni S=(m, n, p)$  a parametry  $a, b$ .

**Poznámka 2.4** Jestliže je v rovnici eliptického paraboloidu  $a = b$ , pak se plocha nazývá rotační eliptický paraboloid vzniklý rotací paraboly kolem osy  $z$ .

### 2.1.11 Hyperbolický paraboloid

**Definice 2.11** *Rovnice*

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 2(z-p),$$

kde  $a, b, m, n, p \in \mathbb{R}$  a  $a, b > 0$ , je rovnicí hyperbolického paraboloidu se středem  $\mathcal{E}_3 \ni S=(m, n, p)$  a parametry  $a, b$ .

**Poznámka 2.5** Hyperbolický paraboloid nelze získat rotací.

### 2.1.12 Fem struktura

Objekty používané při hledání „kontaktních párů“ jsou tvořené sítí uzlů a jsou uloženy v fem struktuře obsahující část  $p$  a  $e$ . Část  $p$  obsahuje souřadnice všech uzlů sítě (tedy je to pole o velikosti v  $\mathcal{E}_2$  dvakrát  $n$  a v  $\mathcal{E}_3$  třikrát  $n$ , kde  $n$  je počet uzlů), část  $e$  obsahuje indexy hraničních elementů (úsečka  $\mathcal{E}_2$ , trojúhelník  $\mathcal{E}_3$ ) a určení vnější oblasti hranice (tedy pole o velikosti v  $\mathcal{E}_2$  třikrát  $m$  a v  $\mathcal{E}_3$  čtyřikrát  $m$ , kde  $m$  je počet uzlů). Fem struktura používaná v naší aplikaci byla vytvořena v programu COMSOL Multiphysics verze 3.3.

## 2.2 Vzájemná poloha těles

### 2.2.1 Tělesa v $\mathcal{E}_2$

**2.2.1.1 Vzájemná poloha dvou bodů** Body:  $X = [x_1, x_2]$ ,  $Y = [y_1, y_2]$ . Jestliže je vzdálenost dvou bodů (viz. kapitola Metrické úlohy) nulová, pak jsou tyto body totožné, v opačném případě řekneme, že jsou různé.

**2.2.1.2 Vzájemná poloha bodu a přímky** Bod:  $X = [x_1, x_2]$ , přímka  $p$ : vektor  $\mathbf{v} = [v_1, v_2]$  a bod  $A = [a_1, a_2]$ . Je-li vzdálenost bodu a přímky (viz. kapitola Metrické úlohy) nulová, pak bod náleží přímce, není-li tomu tak, pak bod přímce nenáleží.

**2.2.1.3 Vzájemná poloha dvou přímek** Přímky:  $p$ : vektor  $\mathbf{v} = [v_1, v_2]$  a bod  $A = [a_1, a_2]$ ,  $q$ : vektor  $\mathbf{u} = [u_1, u_2]$  a bod  $B = [b_1, b_2]$ . Pokud jsou směrové vektory nezávislé, jsou přímky různoběžné a platí:

$$h[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 2,$$

Průsečík  $P = [p_1, p_2]$  musí splňovat obecné rovnice obou přímek, získáme ho tedy řešením soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} v_2 p_1 - v_1 p_2 - v_2 a_1 + v_1 a_2 &= 0 \\ u_2 p_1 - u_1 p_2 - u_2 b_1 + u_1 b_2 &= 0, \end{aligned}$$

pokud

$$h[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 1,$$

a zároveň bod  $B$  splňuje obecnou rovnici přímky  $p$ :

$$v_2 b_1 - v_1 b_2 - v_2 a_1 + v_1 a_2 = 0,$$

pak jsou přímky totožné, jinak jsou rovnoběžné.

### 2.2.2 Tělesa v $\mathcal{E}_3$

**2.2.2.1 Vzájemná poloha dvou bodů** Postup je stejný jako v případě  $\mathcal{E}_3$ .

**2.2.2.2 Vzájemná poloha bodu a přímky** Postup je stejný jako v případě  $\mathcal{E}_3$ .

**2.2.2.3 Vzájemná poloha bodu a roviny** Bod:  $X = [x_1, x_2, x_3]$ , rovina r: normála  $\mathbf{n} = [n_1, n_2, n_3]$  a bod  $A = [a_1, a_2]$ . Pokud je vzdálenost bodu a roviny (viz. kapitola Metrické úlohy) nulová, pak bod náleží rovině, jinak bod rovině nenáleží.

**2.2.2.4 Vzájemná poloha dvou přímek** Přímky: p: vektor  $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$  a bod  $A = [a_1, a_2, a_3]$ , q: vektor  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, u_3]$  a bod  $B = [b_1, b_2, b_3]$ . Pokud platí:

$$h[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = h[\mathbf{u}, \mathbf{v}, AB],$$

pak mají přímky alespoň jeden společný bod, jestliže zároveň platí:

$$h[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 2,$$

přímky jsou různoběžné, průsečík  $P = A + tu$  získáme z rovnosti parametrických rovnic přímek:

$$a_1 + tv_1 = b_1 + su_1$$

$$a_2 + tv_2 = b_2 + su_2$$

$$a_3 + tv_3 = b_3 + su_3$$

pokud platí:

$$h[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 1,$$

přímky jsou totožné. Platí-li:

$$h[\mathbf{u}, \mathbf{v}] < h[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \overrightarrow{AB}],$$

nemají žádný společný bod, jestliže zároveň platí:

$$h[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 1,$$

pak jsou rovnoběžné. Pokud platí:

$$h[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = 2,$$

jsou mimoběžné.

**2.2.2.5 Vzájemná poloha přímky a roviny** Přímka p: vektor  $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$  a bod  $A = [a_1, a_2, a_3]$ , rovina r: normála  $\mathbf{n} = [n_1, n_2, n_3]$  a bod  $B = [b_1, b_2, b_3]$ . Jediný společný bod mají pokud

$$(\mathbf{n}, \mathbf{v}) \neq 0$$

Dosazením parametrického vyjádření přímky do normálové rovnice roviny, získáme parametr  $t \in \mathbb{R}$  pro výpočet průsečíku  $P = A + tv$ :

$$n_1(a_1 + t_1v_1 - b_1) + n_2(a_2 + t_2v_2 - b_2) + n_3(a_3 + t_3v_3 - b_3) = 0,$$

Pokud však

$$(\mathbf{n}, \mathbf{v}) = 0,$$

pak buď platí

$$(\mathbf{n}, \overrightarrow{AB}) = 0$$

a přímka leží v rovině, nebo je s ní rovnoběžná, a platí

$$(\mathbf{n}, \overrightarrow{AB}) \neq 0.$$

**2.2.2.6 Vzájemná poloha dvou rovin** Roviny: r: normála  $\mathbf{n} = [n_1, n_2, n_3]$  a bod  $A = [a_1, a_2, a_3]$ , s: normála  $\mathbf{m} = [m_1, m_2, m_3]$  a bod  $B = [b_1, b_2, b_3]$ . Roviny r a s nemají žádný společný bod, právě když soustava

$$\begin{aligned}(\mathbf{n}, \overrightarrow{AX}) &= 0 \\ (\mathbf{m}, \overrightarrow{BX}) &= 0\end{aligned}$$

nemá řešení, to může nastat, jen když

$$h[\mathbf{m}, \mathbf{n}] = 1 \text{ a } (\mathbf{m}, \overrightarrow{AB}) \neq 0,$$

v tomto případě jsou roviny rovnoběžné. Pokud

$$h[\mathbf{m}, \mathbf{n}] = 2,$$

jsou roviny různoběžné. Jelikož je průsečnice ortogonální k oběma normálovým vektorům rovin, její směrový vektor získáme jako jejich vektorový součin

$$\mathbf{u} = \mathbf{m} \times \mathbf{n},$$

bod P získáme z normálových rovnic rovin

$$\begin{aligned}n_1(p_1 - a_1) + n_2(p_2 - a_2) + n_3(p_3 - a_3) &= 0 \\ m_1(p_1 - b_1) + m_2(p_2 - b_2) + m_3(p_3 - b_3) &= 0,\end{aligned}$$

protože je to však soustava dvou rovnic o třech neznámých, určíme si  $p_3 = 0$ . Jestliže platí

$$h[\mathbf{m}, \mathbf{n}] = 1 \text{ a } (\mathbf{m}, \overrightarrow{AB}) = 0,$$

jsou totožné.



**2.2.2.7 Vzájemná poloha bodu a kvadratické plochy** Bod:  $X = [x_1, x_2, x_3]$ , kvadratická plocha k: obecná rovnice  $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$ . Jestliže bod splňuje rovnici kvadratické plochy, pak jí bod náleží, jinak jí bod nenáleží.

**2.2.2.8 Vzájemná poloha přímky a kvadratické plochy** Přímka p: vektor

$\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]$  a bod  $A = [a_1, a_2, a_3]$ , kvadratická plocha k: obecná rovnice  $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$ . Dosazením parametrické rovnice přímky do rovnice kvadratické plochy dostaneme parametr  $t$ . Jestliže získáme dva parametry  $t \in \mathbb{R}$ , pak přímka danou plochu protíná, jestliže získáme jeden parametr, pak se přímka dané plochy dotýká. Pakliže  $t \notin \mathbb{R}$ , přímka se dané plochy nedotýká.

**2.2.2.9 Vzájemná poloha roviny a kvadratické plochy** Rovina: s: normála

$\mathbf{n} = [n_1, n_2, n_3]$  a bod  $A = [a_1, a_2, a_3]$  a

1. kulová plocha: střed  $S = [s_1, s_2, s_3]$  a poloměr  $r \in \mathbb{R}$ .

Jestliže vzdálenost středu od roviny je větší než poloměr, pak se rovina kulové plochy nedotýká. Pokud je rovna poloměru, mají společný jeden bod  $P$ , který získáme z rovnice:

$$P = S - \frac{\sum_{i=1}^3 (n_i(S_i - A_i))}{\sum_{i=1}^3 (n_i^2)} \mathbf{n}.$$

Pakliže je vzdálenost menší než poloměr, je průnikem kružnice se středem  $S_2$  a poloměrem  $r_2$ :

$$S_2 = S - \frac{\sum_{i=1}^3 (n_i(S_i - A_i))}{\sum_{i=1}^3 (n_i^2)} \mathbf{n}, \quad r_2 = \sqrt{r^2 - d^2}.$$

2. elipsoid: střed  $S = [s_1, s_2, s_3]$  a parametry  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Je-li rovina kolmá na osu x, resp. y, z a je-li absolutní hodnota z-ové souřadnice bodu A větší než parametr a, resp. b, c, pak se rovina dané plochy nedotýká, pokud je rovna, tak mají společný jeden bod, pokud je menší, pak je průnikem elipsa.

3. jednodílný hyperboloid: střed  $S = [s_1, s_2, s_3]$  a parametry  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Je-li rovina kolmá na osu z, pak je průnikem elipsa, jestliže je rovina kolmá na osu x, resp. y a je-li absolutní hodnota x-ové, resp. y-ové souřadnice bodu A rovna parametru a, resp. b pak je průnikem dvojice přímek, jinak je průnikem hyperbola.

4. dvojdílný hyperboloid: střed  $S = [s_1, s_2, s_3]$  a parametry  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Jestliže je rovina kolmá na osu  $z$  a absolutní hodnota  $z$ -ové souřadnice bodu  $A$  je menší než parametr  $c$ , pak se rovina plochy nedotýká, je-li rovna, je průnikem jeden bod, je-li větší, je průnikem elipsa. Pakliže je rovina kolmá na osu  $x$ , resp.  $y$ , pak je průnikem hyperbola.

5. eliptický paraboloid: střed  $S = [s_1, s_2, s_3]$  a parametry  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Jestliže je rovina kolmá na osu  $z$  a absolutní hodnota  $z$ -ové souřadnice bodu  $A$  je větší než parametr  $c$ , pak je průnikem elipsa, je-li rovna, je průnikem jeden bod, je-li menší, rovina se plochy nedotýká. Pakliže je rovina kolmá na osu  $x$ , resp.  $y$ , pak je průnikem parabola.

6. hyperbolicý paraboloid: střed  $S = [s_1, s_2, s_3]$  a parametry  $a, b \in \mathbb{R}$ .

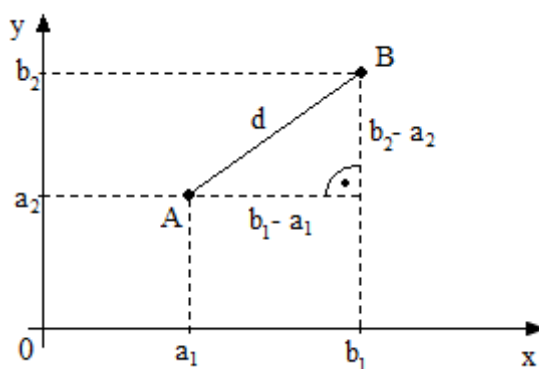
Jestliže je rovina kolmá na osu  $z$  a absolutní hodnota  $z$ -ové souřadnice bodu  $A$  je rovna parametru  $c$ , pak je průnikem hyperbola, jinak je průnikem dvojice přímek. Pakliže je rovina kolmá na osu  $x$ , resp.  $y$ , pak je průnikem parabola.

## 2.3 Metrické úlohy

### 2.3.1 Vzdálenosti

**2.3.1.1 Vzdálenost dvou bodů** Pro výpočet vzdálenosti dvou bodů  $A$  a  $B \in \mathcal{E}_n$ , pro  $n = 2, 3$ , platí:

$$d = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}.$$



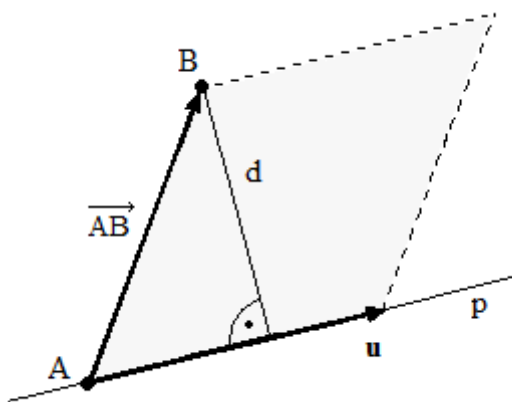
Obrázek 1: Vzdálenost dvou bodů.

**2.3.1.2 Vzdálenost bodu a přímky** Vzdálenost bodu  $A \in \mathcal{E}_2$  a přímky  $p$ , dané bodem  $B \in \mathcal{E}_2$  a vektorem  $\mathbf{u} \in \mathcal{E}_2$  je určena vztahem:

$$d = \frac{|a_1 u_2 - a_2 u_1 - b_1 u_2 + b_2 u_1|}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2)}}.$$

Pro  $\mathcal{E}_3$  platí:

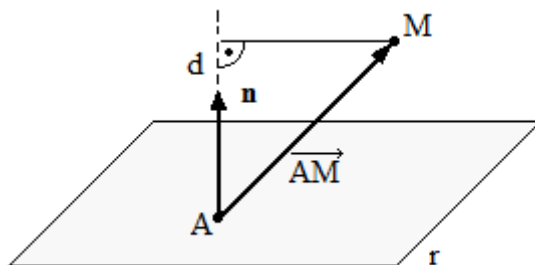
$$d = \frac{\|\mathbf{u} \times \overrightarrow{AB}\|}{\|\mathbf{u}\|}.$$



Obrázek 2: Vzdálenost bodu a přímky.

**2.3.1.3 Vzdálenost bodu a roviny** Je-li dán bod  $B \in \mathcal{E}_3$  a rovina  $r$ , určená bodem  $A \in \mathcal{E}_3$  a normálou  $\mathbf{n} \in \mathcal{E}_3$ , pak pro vzdálenost platí:

$$d = \frac{|(\mathbf{n}, \overrightarrow{AB})|}{\|\mathbf{n}\|}.$$



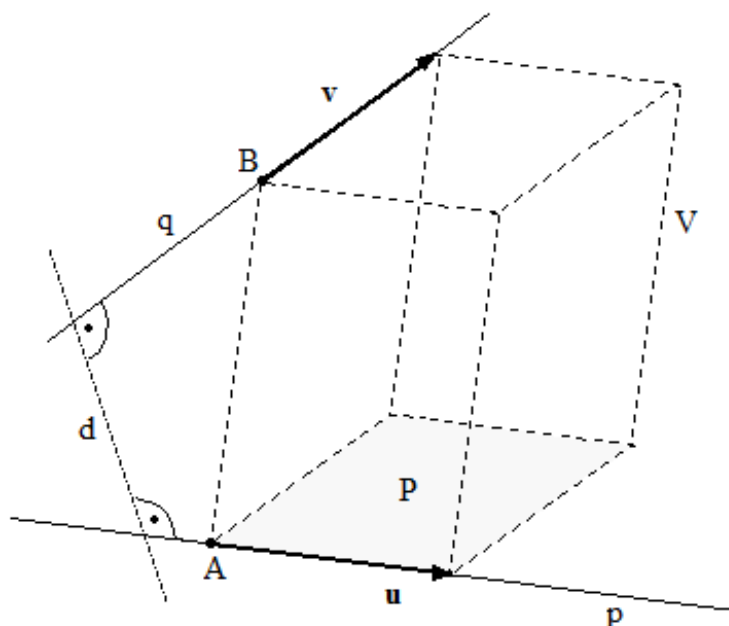
Obrázek 3: Vzdálenost bodu a roviny.

**2.3.1.4 Vzdálenost bodu a kvadratické plochy** Vzdálenost bodu a kvadratické plochy převedeme na úlohu najít vzdálenost bodu a středu této kvadratické plochy.

**2.3.1.5 Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek** Vzdálenost rovnoběžných přímek  $p \in \mathcal{E}_2$ , resp.  $\mathcal{E}_3$  a  $q \in \mathcal{E}_2$ , resp.  $\mathcal{E}_3$  převedeme na úlohu vzdálenosti bodu přímky  $p$  od přímky  $q$ .

**2.3.1.6 Vzdálenost dvou mimoběžných přímek** Nejkratší vzdálenost mimoběžných přímek  $p$ , dané bodem  $A \in \mathcal{E}_3$  a vektorem  $\mathbf{u} \in \mathcal{E}_3$ , a  $q$ , dané bodem  $B \in \mathcal{E}_3$  a vektorem  $\mathbf{v} \in \mathcal{E}_3$ , je dána vztahem:

$$d = \frac{|\det[\vec{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}]|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}.$$



Obrázek 4: Vzdálenost dvou mimoběžných přímek.

**2.3.1.7 Vzdálenost rovnoběžné přímky a roviny** Výpočet vzdálenosti přímky  $p \in \mathcal{E}_3$  a roviny  $r \in \mathcal{E}_3$  převedeme na úlohu vzdálenosti bodu přímky od roviny.

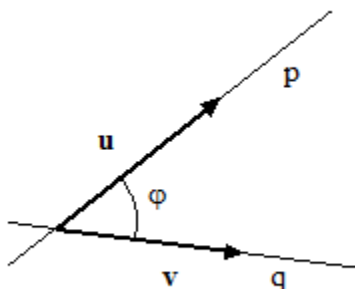
**2.3.1.8 Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin** I zde převedeme výpočet vzdálenosti rovin  $r \in \mathcal{E}_3$  a  $s \in \mathcal{E}_3$  na úlohu vzdálenosti bodu roviny  $r$  od roviny  $s$ .

## 2.3.2 Odchyly

**2.3.2.1 Odchylna dvou různoběžných přímek** Odchylna  $\varphi$  dvou různoběžných přímek  $p \in \mathcal{E}_2$ , resp.  $\mathcal{E}_3$  a  $q \in \mathcal{E}_2$ , resp.  $\mathcal{E}_3$  je dána vztahem:

$$\cos \varphi = \frac{|(\mathbf{u}, \mathbf{v})|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|},$$

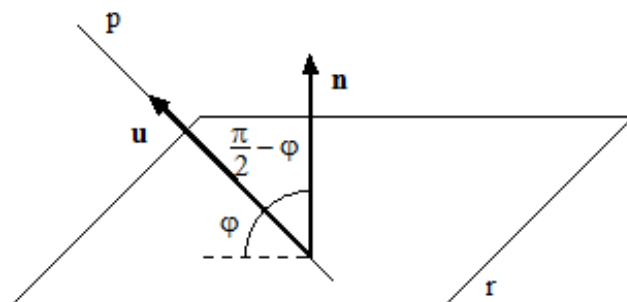
kde  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  jsou směrové vektory přímek.



Obrázek 5: Odchylna dvou různoběžných přímek.

**2.3.2.2 Odchylna různoběžné přímky a roviny** Pro výpočet odchylny  $\varphi$  různoběžné přímky  $p \in \mathcal{E}_3$  se směrovým vektorem  $\mathbf{u}$  a roviny  $r \in \mathcal{E}_3$  s normálovým vektorem  $\mathbf{n}$  platí:

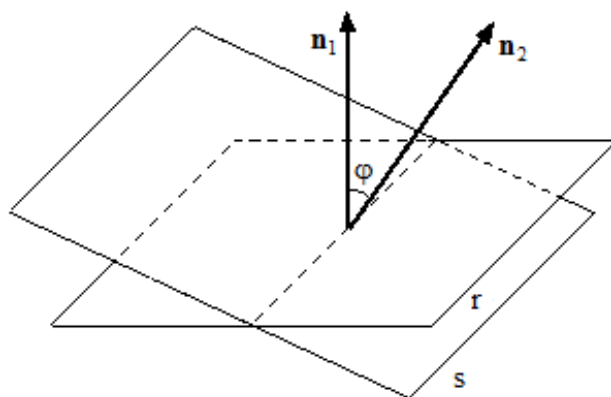
$$\sin \varphi = \frac{|(\mathbf{n}, \mathbf{u})|}{\|\mathbf{n}\| \|\mathbf{u}\|}.$$



Obrázek 6: Odchylna různoběžné přímky a roviny.

**2.3.2.3 Odchylka dvou různoběžných rovin** Odchylka  $\varphi$  dvou rovin  $r \in \mathcal{E}_3$  a  $s \in \mathcal{E}_3$ , což je nejmenší úhel dvou přímek, z nichž každá leží v jedné z rovin, vyjádříme pomocí jejich normálových vektorů  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$  a vztahu

$$\cos \varphi = \frac{|(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)|}{\|\mathbf{n}_1\| \|\mathbf{n}_2\|}.$$



Obrázek 7: Odchylka dvou různoběžných rovin.

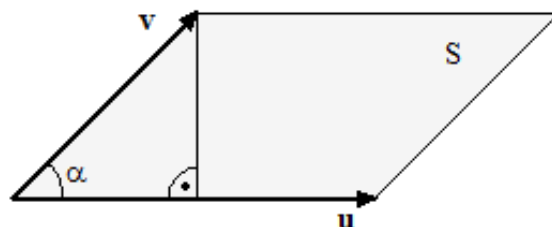
## 2.4 Výpočet obsahu a objemu

### 2.4.1 Výpočet obsahu v $\mathcal{E}_2$

Pro výpočet obsahu rovnoběžníku tvořeného vektory  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v} \in \mathcal{E}_2$  využijeme vztahu:

$$S = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin(\alpha)$$

kde  $\alpha = \arccos \left( \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right)$ .



Obrázek 8: Obsah rovnoběžníku v  $\mathcal{E}_2$ .

### 2.4.2 Výpočet obsahu v $\mathcal{E}_3$

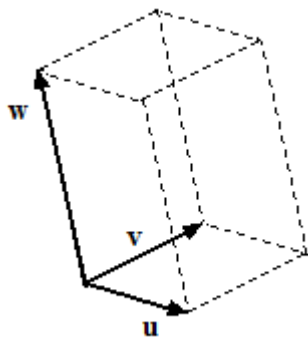
Obsah rovnoběžníku tvořeného vektory  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v} \in \mathcal{E}_3$  je roven jejich vektorovému součinu:

$$S = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|.$$

### 2.4.3 Výpočet objemu v $\mathcal{E}_3$

Objem rovnoběžnostěnu tvořeného vektory  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{w} \in \mathcal{E}_3$  je roven jejich smíšenému součinu:

$$V = |\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|.$$



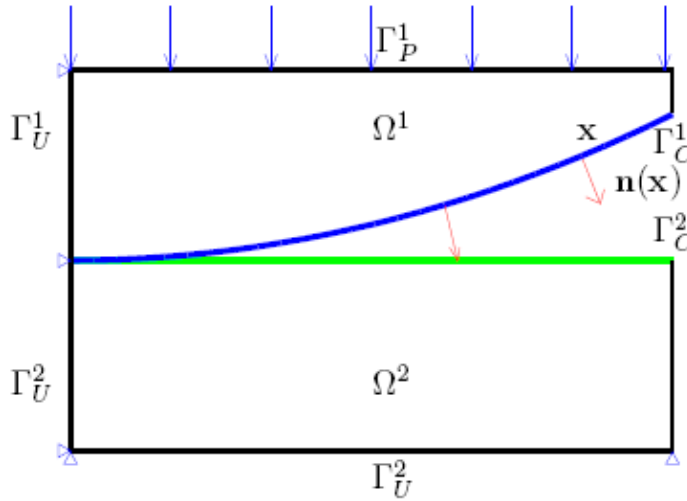
Obrázek 9: Objem rovnoběžnostěnu v  $\mathcal{E}_3$ .

## 2.5 Kontaktní úloha

### 2.5.1 Formulace kontaktní úlohy

Nyní si představíme spojitou formulaci kontaktní úlohy.

Uvažujme systém pružných těles reprezentovaných oblastmi  $\Omega^p \in \mathbb{R}^3, p = 1, 2, \dots, s$  s Lipschitzovskými hranicemi  $\Gamma^p$ , které jsou rozděleny na tři disjunktní části  $\Gamma_u^p, \Gamma_t^p$  a  $\Gamma_c^p$  tak, že  $\Gamma^p = \overline{\Gamma_u^p} \cup \overline{\Gamma_t^p} \cup \overline{\Gamma_c^p}$ . Nulová posunutí jsou předepsána na hranicích  $\Gamma_u^p$ , zatímco povrchové síly  $\mathbf{t}^p \in (L^2(\Gamma_t^p))^3$  působí na  $\Gamma_t^p$ . Hranice  $\Gamma_c^p$  oblasti  $\Omega^p$  se může dostat do jednostranného kontaktu s nějakou další oblastí. Dále předpokládejme, že v oblasti  $\Omega^p$  působí objemové síly o hustotě  $\mathbf{f}^p \in (L^2(\Omega^p))^3, p = 1, 2, \dots, s$ . Pro ilustraci se podívejme na obrázek 10, na kterém jsou vidět dvě tělesa ve vzájemném kontaktu.



Obrázek 10: Dvě tělesa ve vzájemném kontaktu.

K popisu nepronikání těles použijeme linearizovanou podmínku nepronikání, která je definovaná zobrazením  $\chi : \Gamma_c \rightarrow \Gamma_c, \Gamma_c = \bigcup_{p=1}^s \Gamma_c^p$ , které přiřadí každému  $\mathbf{x} \in \Gamma_c^p$  nějaký blízký bod  $\chi(\mathbf{x}) \in \Gamma_c^q, p \neq q$ . Necht'  $\mathbf{v}^p(\mathbf{x}), \mathbf{v}^q(\chi(\mathbf{x}))$  označují vektory posunutí v bodě  $\mathbf{x}$ , respektive v bodě  $\chi(\mathbf{x})$ . Za předpokladu malých posunutí, *podmínky nepronikání* vypadají následovně:

$$v_n^p(\mathbf{x}) \equiv (\mathbf{v}^p(\mathbf{x}) - \mathbf{v}^p(\chi(\mathbf{x}))) \cdot \mathbf{n}^p(\mathbf{x}) \leq \delta^p(\mathbf{x}), \quad (1)$$

kde  $\delta^p(\mathbf{x}) = (\chi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}^p(\mathbf{x})$  je počáteční vzdálenost a  $\mathbf{n}^p(\mathbf{x})$  je kritický směr definovaný vztahem  $\mathbf{n}^p(\mathbf{x}) = (\chi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}) / \|\chi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\|$ , nebo pokud  $\chi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ , vnějším jednotkovým normálovým vektorem ke  $\Gamma_c^p$ .



Za účelem zformulování kontaktní úlohy zavedeme nejdříve prostor *virtuálních posunutí*  $V$ :

$$V = \left\{ \mathbf{v} = (\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^s) \in \prod_{p=1}^s (H^1(\Omega^p))^3 : \mathbf{v}^p = 0 \text{ na } \Gamma_u^p \right\} \quad (2)$$

a jeho uzavřenou podmnožinu *kinematicky přípustných* posunutí  $K$ :

$$K = \{ \mathbf{v} \in V : v_n^p(\mathbf{x}) \leq \delta^p(\mathbf{x}) \text{ pro } \mathbf{x} \in \Gamma_c^p \}. \quad (3)$$

Variační formulace kontaktní úlohy vypadá následovně:

$$\min \mathcal{J}(\mathbf{v}) \quad \text{za podmínky} \quad \mathbf{v} \in K, \quad (4)$$

kde

$$\mathcal{J}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}) \quad (5)$$

je funkcionál celkové potenciální energie s bilineární formou  $a$  reprezentující vnitřní energii těles a lineární formou  $b$  reprezentující práci působících sil  $\mathbf{t}^p$  a  $\mathbf{f}^p$ . Další podrobnosti jsou v [4, 5].

### 2.5.2 Postup hledání „kontaktních párů“

Pro nalezení „kontaktních párů“ je třeba z každého vrcholu Masteru vyslat přímkou s vektorem, který je kombinací normál sousedních elementů obsahujících vrchol. Kombinace vektorů je ovlivněna velikostí elementu (délka úsečky  $\mathcal{E}_2$ , obsah trojúhelníku  $\mathcal{E}_3$ ). Poté zjišťujeme, zda tato přímka protne některý z elementů Slavu, tedy hledáme průsečík s přímkou, resp. rovinou, a ověříme, že náleží dané úsečce, resp. trojúhelníku. Aby byl průsečík považován za „kontaktní pár“, musí splňovat:

- skalární součin směrového vektoru přímky a normály elementu Slavu je menší než 0,
- vzdálenost vrcholu od průsečíku je nejmenší ze vzdáleností od ostatních průsečíků,
- jestliže přímka protíná Master je vzdálenost průsečíku s Masterem větší než se Slavem.

Pokud průsečík splňuje tyto kritéria, zaznamenáme jeho vzdálenost od vrcholu (pokud je průsečík v opačném směru, je vzdálenost záporná a tělesa se pronikají), index vrcholu Mastera a index elementu Slava.

### 3 Implementace v MATLABu

Teoretické znalosti a postupy z předchozí kapitoly jsou využity při implementování aplikace v MATLABu, který jak již bylo řečeno v úvodu, svým určením vyhovuje potřebám vytvoření aplikace. Jelikož náplní práce není programování v MATLABu, nebudeme se věnovat implementaci celé aplikace, ale ukážeme si využití matlabovských funkcí na konkrétních příkladech.

V následujícím výpisu si ukážeme použití funkcí pracujících s vektory (v MATLABu je vektor chápán jako matice komplexních čísel nebo znaků o velikosti  $1 \times n$  nebo  $n \times 1$ ) z různých částí aplikace. Například můžeme zkontrolovat, zda je vstupní proměnná číselný vektor určité délky. Při výpočtu metrických úloh, obsahu a objemu využijeme funkce pro skalární a vektorový součin, sumu a normu vektoru. Funkci pro hodnotu matice hojně využijeme při zjišťování vzájemné polohy.

---

```
%příklad ošetření vstupního vektoru ve 2D
if ~ isvector(A) || ~ isnumeric(A) || length(A)~=2; error('Bod_A_neni_zadan_korektne!'); end;

%hodnota matice
rank([a;b]);

%vypocet vzdalenosti bodu a primky ve 3D
y=norm(cross(b,B-A))/norm(b);

%vypocet vzdalenosti bod rovina
y=abs(sum((B-A).*nb))/norm(nb);

%obsah 2D
p=norm(u)*norm(v);
S=p*sin(acos(dot(u,v)/p));

%obsah 3D
S=norm(cross(u,v));

% objem 3D
V=abs(dot(w,cross(u,v)));
```

---

Výpis 1: Matlabovské funkce pracující s vektory.

MATLAB umožňuje jednoduché grafické zobrazení výsledků. Pro lineární útvary můžeme využít funkci `plot`, která zobrazí zadanou množinu bodů, nebo `ezplot` a `ezsurf`, které zobrazují na základě řetězce reprezentujícího rovnici. Kvadratické plochy také zobrazujeme pomocí funkce `surf`, pro kulovou plochu a elipsoid můžeme využít funkce `ellipsoid`, která nám danou množinu bodů vygeneruje. `fill`, `fill3` slouží k zobrazení mnohoúhelníku a `patch` k zobrazení objektu tvořenému mnohoúhelníky.

---

```
% zobrazí bod
plot(A(1),A(2), 'b*');

% zobrazí primku
```

```

k=[num2str(b(2)), 'x-(', num2str(b(1)), ')y-(', num2str(B(1)*b(2)-B(2)*b(1)), ')'];
ezplot(k,[A(1)-10, A(1)+10,A(2)-10, A(2)+10]);

% zobrazí rovinu
k=[num2str(-nor(1)/nor(3)), 'x-(', num2str(nor(2)/nor(3)), ')y+(', num2str((bod(1)*nor(1)+bod
(2)*nor(2)+bod(3)*nor(3))/nor(3)), ')'];
ezsurf(k, [stred(1)-2*a stred(1)+2*a stred(2)-2*b stred(2)+2*b]);

%zobrazí jednodílný hyperboloid
[v,u]=meshgrid(1:2*pi/200:1.8,0:2*pi/200:2*pi);
x=a.*v.*cos(u)+stred(1);
y=b.*v.*sin(u)+stred(2);
z=c.*sqrt(v.*v-1)+stred(3);
surf(x,y,z);

%zobrazí elipsoid
[x,y,z] = ellipsoid(stred(1), stred(2), stred(3), a, b, c);
surf(x,y,z);

%zobrazení rovnoběžníku ve 2D
fill(X,Y, [0.8 0.8 0.8]);

%zobrazení rovnoběžníku ve 3D
fill3(X,Y,Z, [0.8 0.8 0.8]);

%zobrazí objekt uložený ve fem strukture
ES=femS.e(1:3,:);
x=femS.p(1,:);X=x(ES);
y=femS.p(2,:);Y=y(ES);
z=femS.p(3,:);Z=z(ES);
patch(X, Y, Z,[0.85 0.82 0.92]);

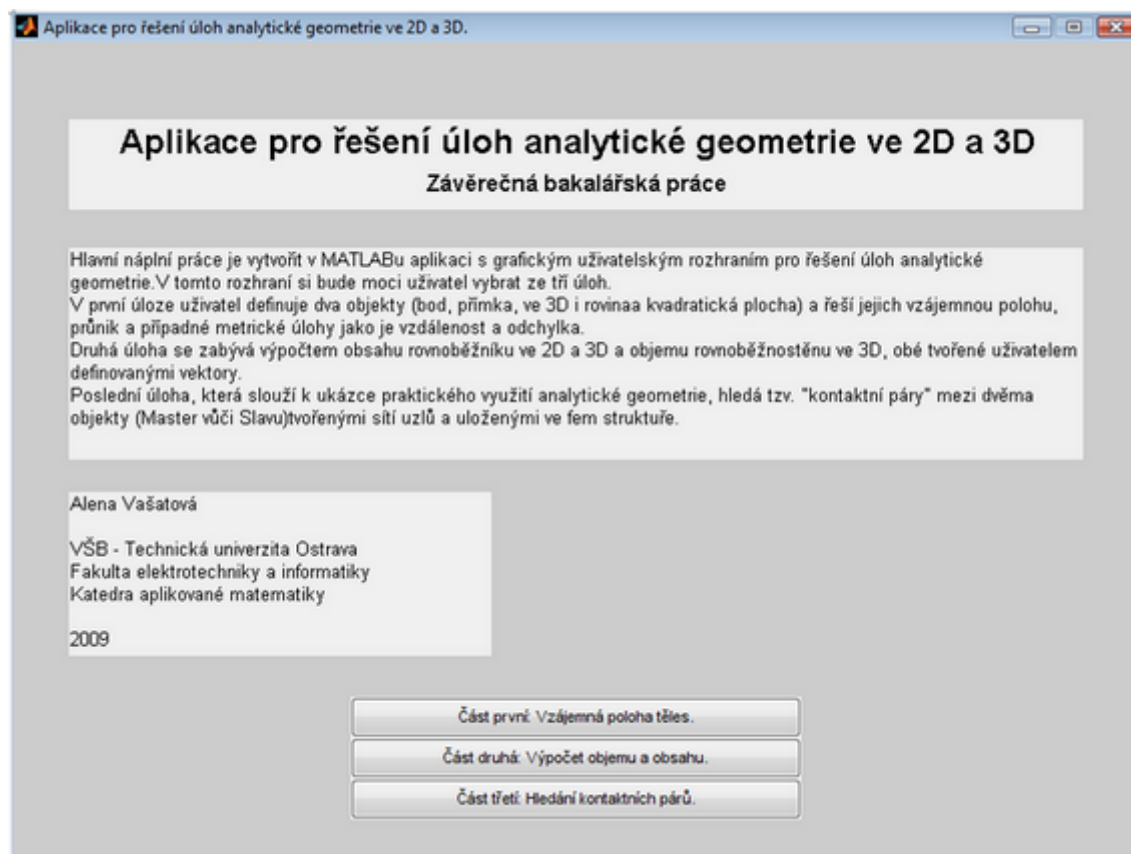
```

---

Výpis 2: Matlabovské funkce pro zobrazení výsledku.

## 4 Aplikace

Úvodní okno aplikace poskytuje souhrné informace o bakalářské práci a o jednotlivých částech, které z něj lze spouštět.



Obrázek 11: Úvodní okno aplikace.

### 4.1 Vzájemná poloha těles

V menu aplikace si uživatel zvolí dimenzi, v panelech pro zadání si pomocí pop-up menu vybere, pro které objekty chce zjistit vzájemnou polohu, a v příslušných polích vyplní údaje, které je určují. Pro bod jsou to například jeho souřadnice, pro kvadratickou plochu střed a parametry atd. Po zmáčknutí tlačítka OK se zobrazí grafický výsledek, tedy oba objekty a případné společné body, pomocí tlačítka rotace lze s výsledkem rotovat. Pod ním se zobrazí i slovní výsledek s případným popisem společných bodů. K vymazání zadávacích polí a výsledků slouží tlačítko Clear.

**Poznámka 4.1** Příklad použití

Zjistíme vzájemnou polohu přímky s vektorem  $\mathbf{v} = [0, 5, -1]$  a bodem  $A = [-1, 2, 5]$  a elipsoidu se středem  $S = [1, 4, 6]$  a parametry  $a = 3$ ,  $b = 1$ ,  $c = 3$ . Přímka elipsoid protíná v bodech  $[-1; 3, 4; 4, 7]$  a  $[-1; 4, 5; 4, 5]$ .

## 4.2 Výpočet objemu a obsahu

I v této části lze v menu zvolit dimenzi úlohy, poté uživatel vyplní souřadnice vektorů. Pokud si zvolil 3D, může si v pop-up menu vybrat, zda chce počítat obsah nebo objem. Grafický a slovní výsledek se opět zobrazí po stisknutí tlačítka OK. K vymazání zadávacích polí a výsledků slouží tlačítko Clear.

### Poznámka 4.2 Příklad použití

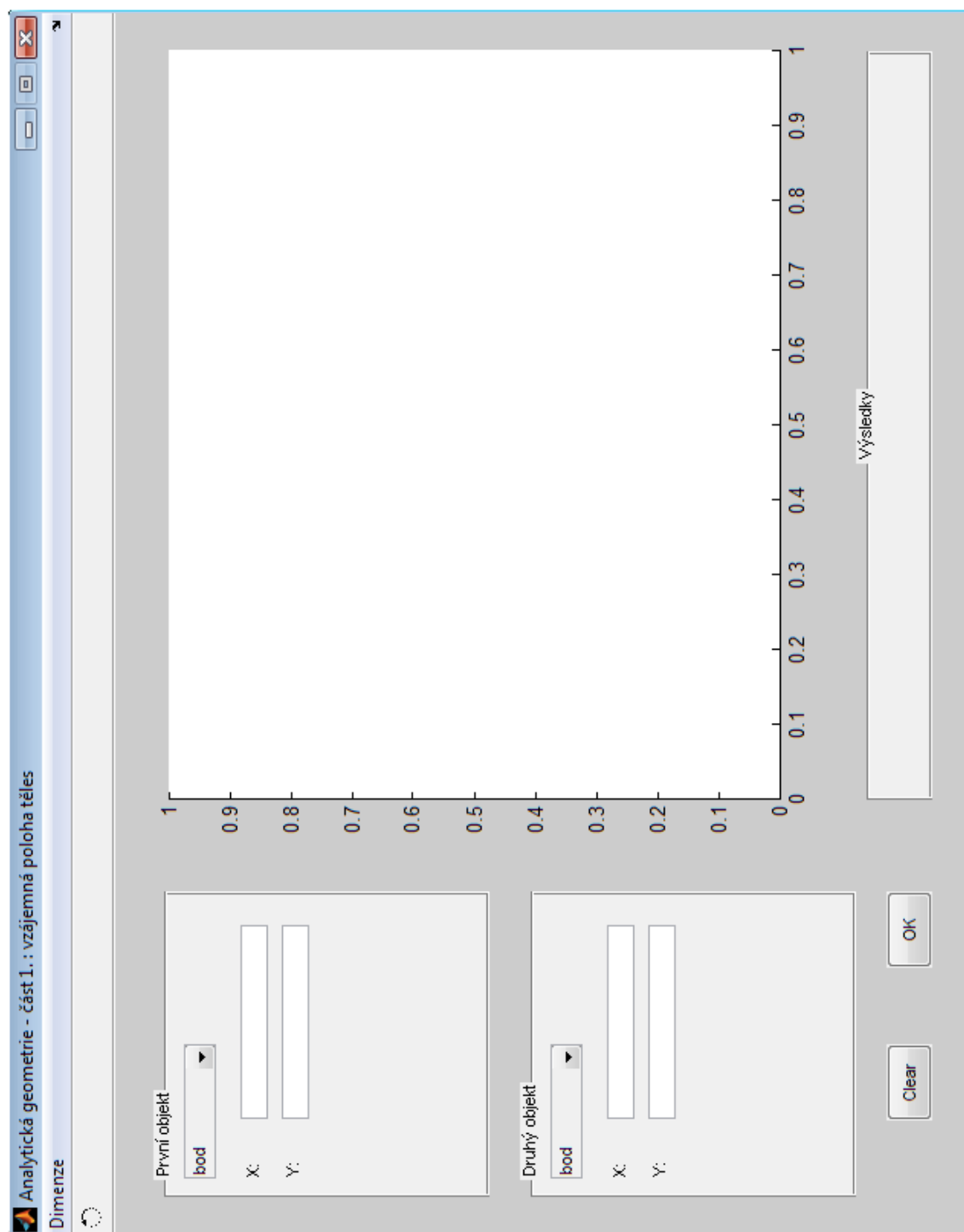
Vypočteme obsah rovnoběžnostěnu pro vektory  $\mathbf{u} = [4, -2, 0]$  a  $\mathbf{v} = [1, -5, 9]$ . Výsledný obsah je 44,0908.

## 4.3 Hledání „kontaktních párů“

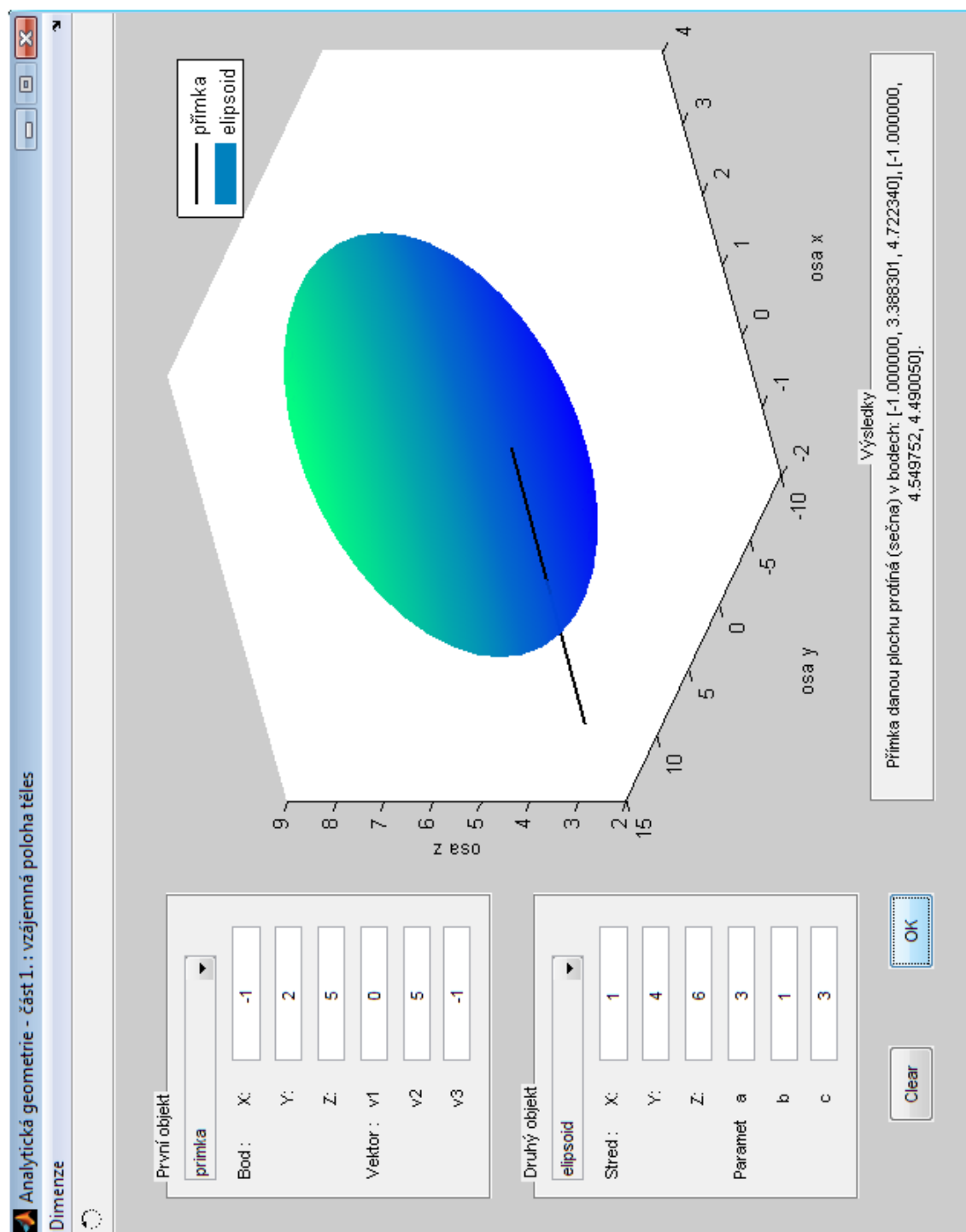
Po stisknutí tlačítka zadat Master, resp. zadat Slave se otevře dialogové okno pro vybrání souboru (.mat) s fem strukturou, dimenze se zadává přepnutím radiobuttonu. Tlačítko OK a Clear mají stejný účel jako v předchozích částech, ale slovní výsledek je nahrazen tabulkou s těmito sloupci: vzdálenost průsečíku od vrcholu, index vrcholu Mastera a index hraničního elementu Slava.

### Poznámka 4.3 Příklad použití

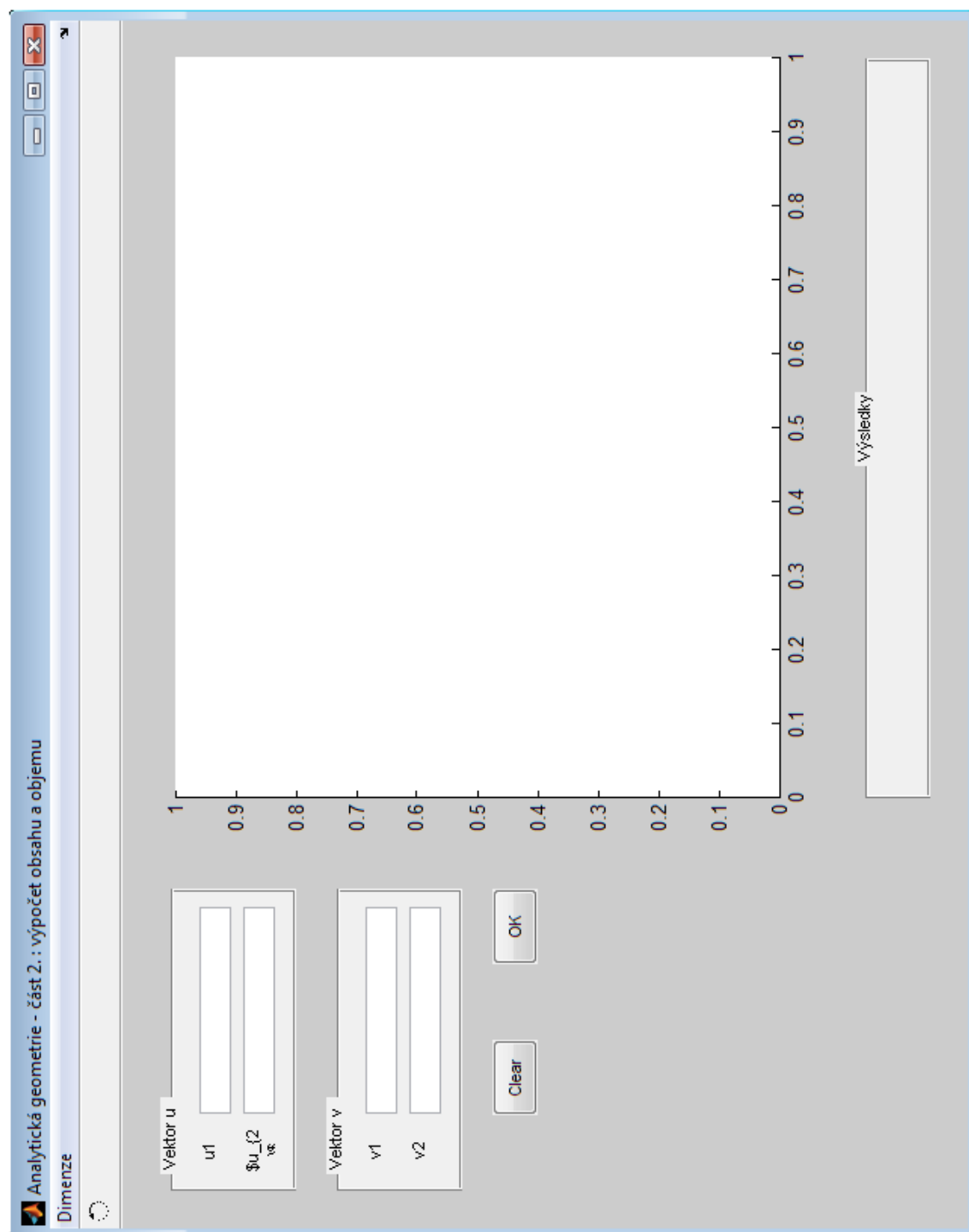
Načteme objekty uložené ve femSquare a femCircle.



Obrázek 12: Aplikace část první.

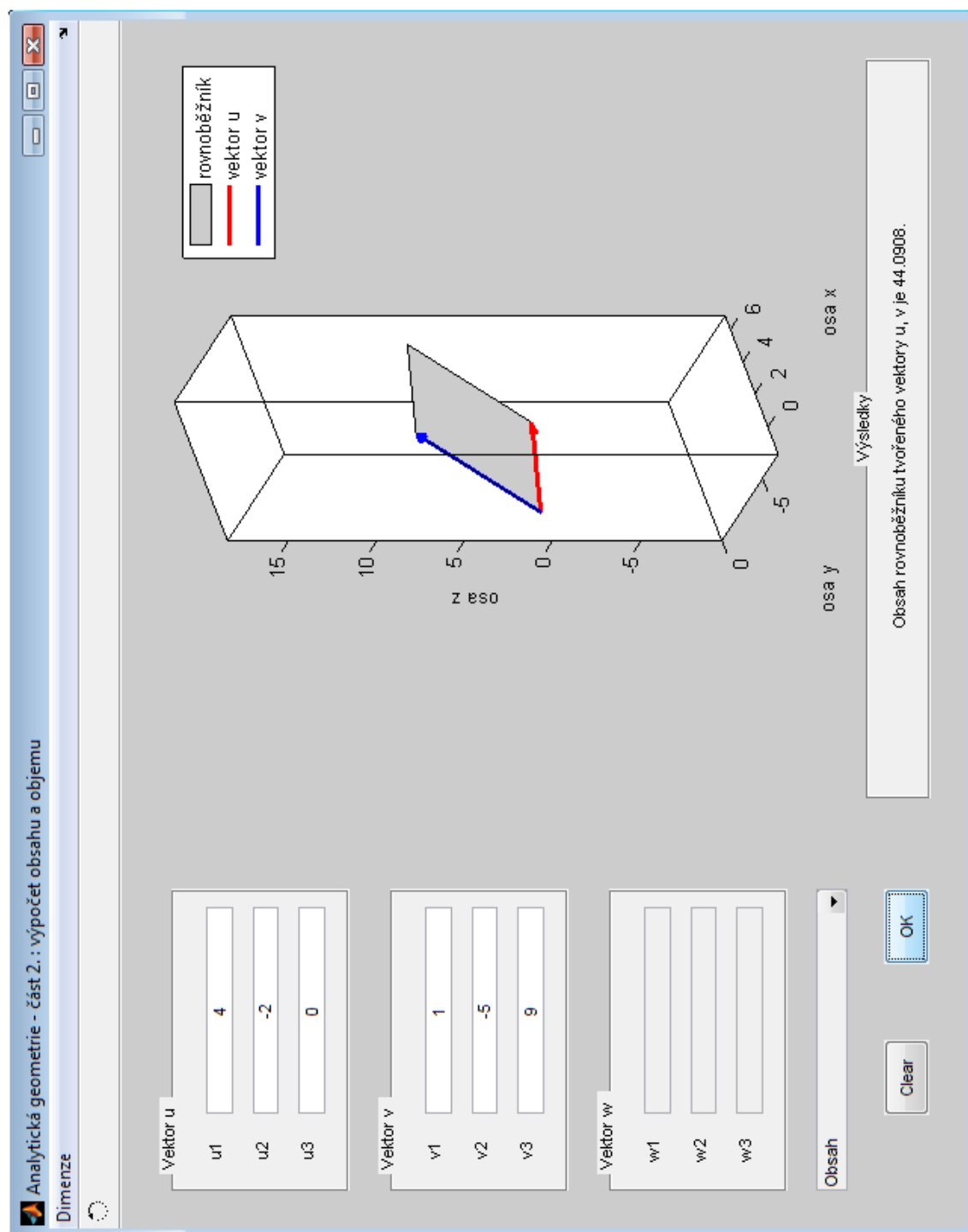


Obrázek 13: Aplikace část první - příklad použití.

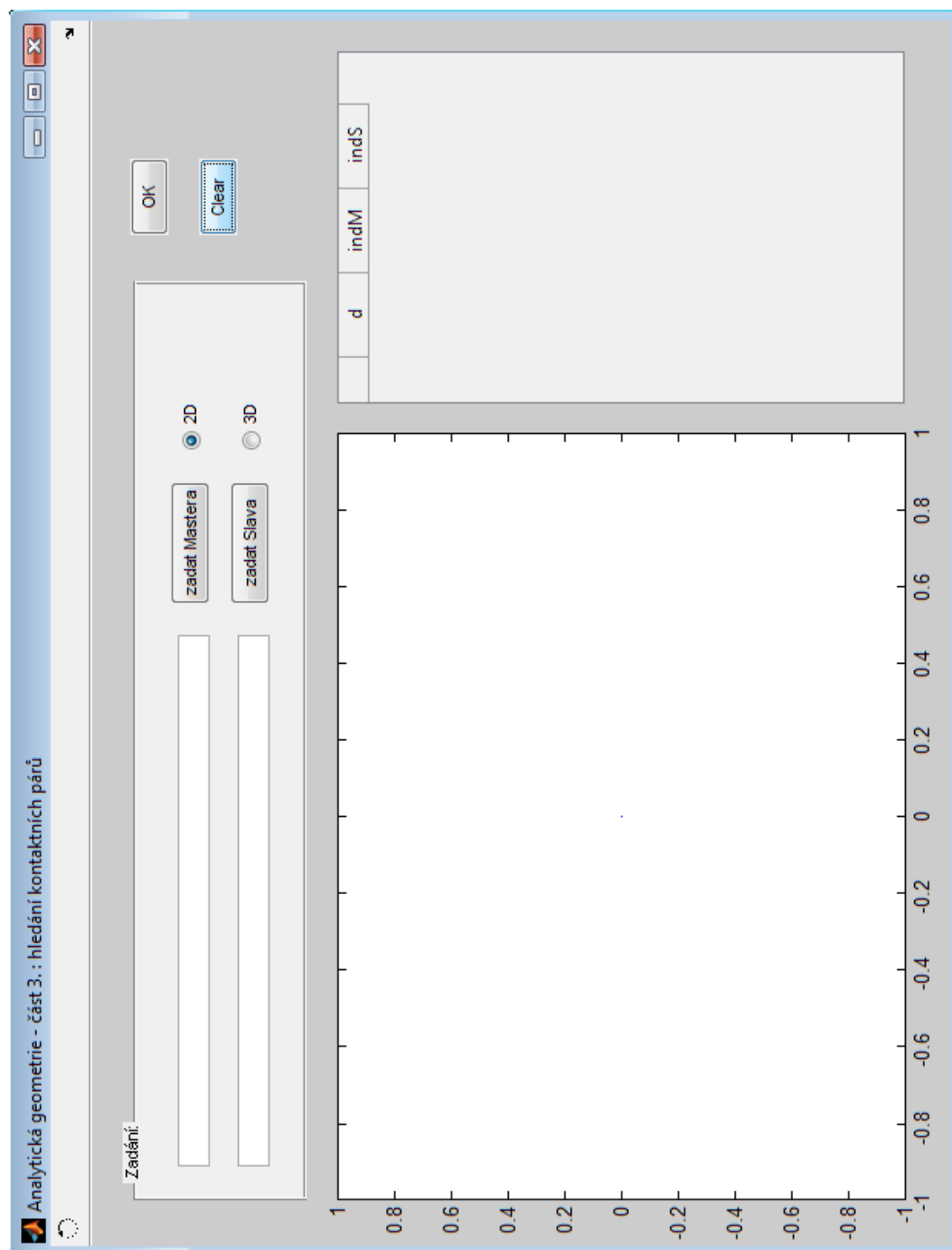


Obrázek 14: Aplikace část druhá.

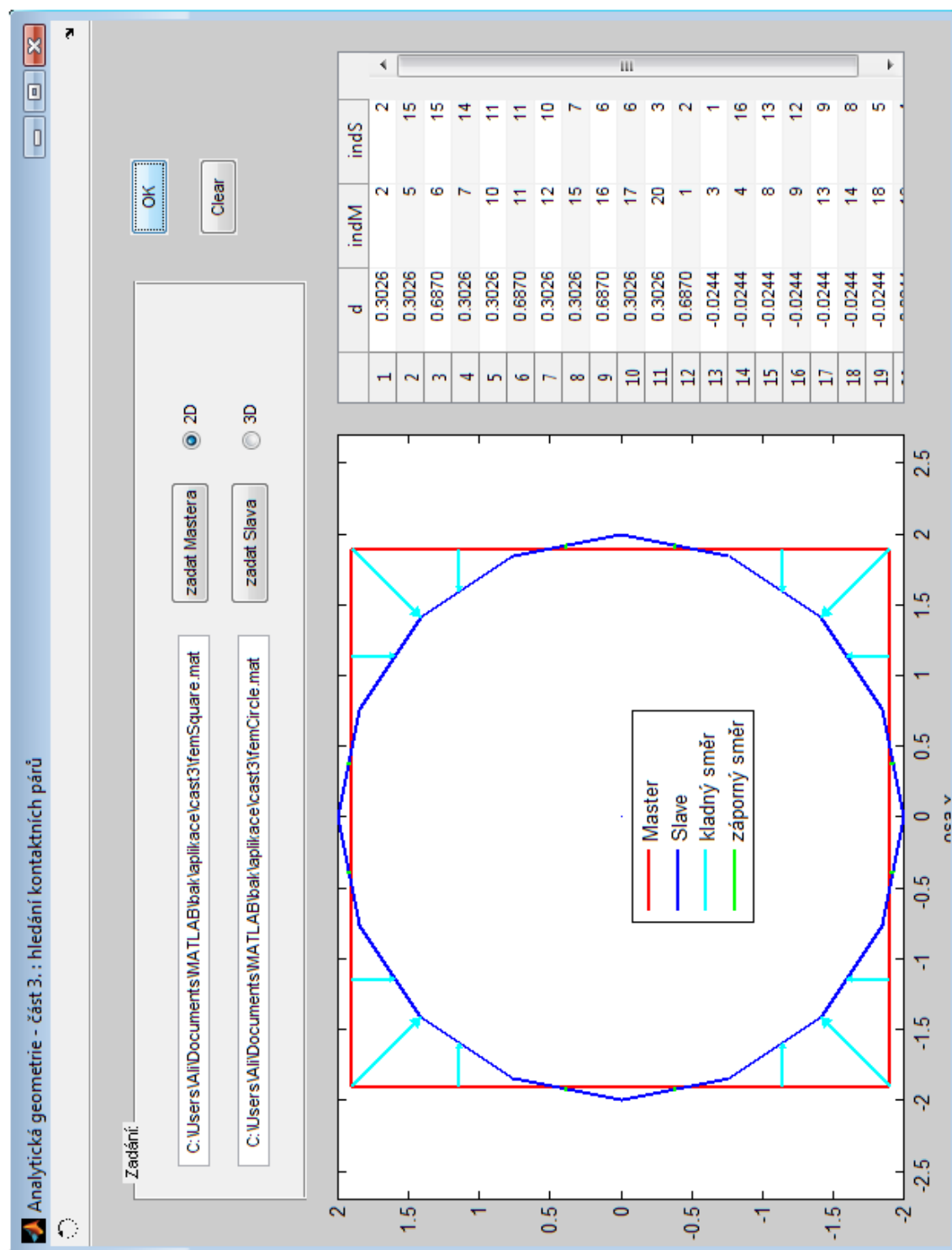




Obrázek 15: Aplikace část druhá - příklad použití.



Obrázek 16: Aplikace část třetí.



Obrázek 17: Aplikace část třetí - příklad použití.

## 5 Závěr

Hlavním cílem práce bylo vytvoření aplikace s grafickým uživatelským rozhraním pro řešení úloh analytické geometrie, jako ukázkou praktického využití analytické geometrie jsme uvedli hledání „kontaktních párů“ a kontaktní úlohu. Nejprve jsme probrali potřebné základní teoretické znalosti, popsali jsme si objekty analytické geometrie, typy a řešení jednotlivých úloh, společně s hledáním „kontaktních párů“.

V následující kapitole jsme uvedli ukázkou využití MATLABovských funkcí při implementaci aplikace. V poslední kapitole jsme se seznámili se samotnou aplikací a jejím uživatelským rozhraním a ukázali si příklady použití této aplikace.

Možným vylepšením aplikace by mohla být paralelizace výpočtu hledání „kontaktních párů“ a jiné uložení fem struktury, díky čemuž by byl výpočet efektivnější. Jako nejpravděpodobnější další pokračování této práce se jeví právě řešení kontaktních úloh, což je téma, které je v popředí zájmu Katedry aplikované matematiky již mnoho let.

## 6 Literatura

- [1] T. Kozubek, *Úvod do analytické geometrie*,  
[http://www.am.vsb.cz/kozubek/matlab/an\\_geometrie.pdf](http://www.am.vsb.cz/kozubek/matlab/an_geometrie.pdf), 7.5.2009.
- [2] L. Lomtadze, *Co je to analytická geometrie*,  
<http://www.math.muni.cz/mlc/vyuka/M3521/uvod.html>, 7.5.2009.
- [3] P. Burda, R. Havelek, R. Hradecká, *Algebra a analytická geometrie*, 2. vydání, VŠB-TUO Ostrava, Ostrava, 2005.
- [4] I. Hlaváček, J. Haslinger, J. Nečas, J. Lovíšek: *Numerical Solution of Variational Inequalities*, Springer Series in Applied Mathematical Sciences, Vol. 66, Springer, New York, 1988.
- [5] G. Duvaut, J.L. Lions: *Inequalities in mechanics and physics*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol 219, Springer, Berlin, 1976.